



Olimpiada Națională de Matematică 2016

Etapa locală – Iași, 1 februarie 2016

CLASA A IX - A

Problema 1. Rezolvați ecuația $[x] + \frac{1}{[x]} = \{x\} + \frac{1}{\{x\}}$ (unde $[x]$ este partea întreagă a lui x , iar $\{x\}$ este partea fracționară a lui x).

Problema 2. Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$ și $a^2 + b^2 + c^2 = 4$, demonstrați inegalitatea

$$\frac{a^3}{b+3c} + \frac{b^3}{c+3a} + \frac{c^3}{a+3b} \geq 1.$$

Problema 3. Se consideră paralelogramul $ABCD$. O dreaptă care nu conține punctul A intersectează dreptele AB , AC și AD în punctele B_1, C_1 , respectiv D_1 . Arătați că dacă $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD_1} = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{AC_1} = \lambda_3 \cdot \overrightarrow{AC}$, atunci $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_3}$.

Problema 4. Vectorii $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ de modul 1 sunt situați în același semiplan limitat de o dreaptă care trece prin O . Arătați că $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| > 1$.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



Olimpiada Națională de Matematică 2016

Etapa locală – Iași, 1 februarie 2016

CLASA A A X-A

Problema 1.

Determinați numerele complexe z , de modul 1, pentru care $z^3 + z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$ și apoi calculați suma acestora și aria poligonului convex având ca vârfuri imaginile în plan ale acestora.

Gazeta Matematică, nr. 11/2015

Problema 2.

Să se arate că oricare ar fi $x, y \in (0, 1)$, $x + y = 1$ avem:

a) $\frac{\ln x + \ln y}{2} \leq \ln \frac{1}{2}$

b) $x \ln x + y \ln y \geq \frac{\ln x + \ln y}{2}$

Problema 3.

Se consideră $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ și ecuația $x^n + ax + 1 = 0$. Să se arate că orice soluție $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ a

ecuației, satisface: $|z| \geq \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$

Problema 4.

a) Demonstrați că: $\sqrt[k]{k!} \leq \frac{k}{2}$, $(\forall) k \in \mathbb{N}$, $k \geq 6$.

b) Demonstrați că, dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$, atunci: $1 \cdot \sqrt{2!} \cdot \sqrt[3]{3!} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{n!} \leq \frac{6 \cdot n!}{2^n}$.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



Olimpiada Națională de Matematică 2016

Etapa locală – Iași, 1 februarie 2016

CLASA A XI-A

Problema 1. Pentru fiecare număr natural n se consideră funcția

$$f_n: (-1, 1) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^n}.$$

- a) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = -\frac{1}{4}$.
- b) Să se arate că nu există $\lim_{x \rightarrow 0} f_3(x)$.
- c) Să se determine n pentru care există $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$.

Problema 2. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit astfel: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2a_n^2 + 1}{2a_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

- a) șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător;
- b) $n \leq a_n^2 < n + \sqrt{n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$;
- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 1$.

Problema 3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Să se demonstreze că, dacă $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, unde

$$n \in \mathbb{N}^*, \text{ atunci } \frac{b_n}{2} = \frac{c_n}{3} = \frac{a_n - d_n}{4}.$$

Problema 4. Fie n un număr natural mai mare sau egal cu 2. Se consideră două matrice $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, astfel încât A să fie inversabilă și $3AB = 2BA + I_n$.

- a) Să se determine matricea B , știind că $n = 2$ și $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- b) Să se demonstreze că $\det(I_n - AB) = \det(I_n - BA)$.
- c) Să se arate că $\det(AB - BA) = 0$.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



Olimpiada Națională de Matematică 2016 Etapa locală – Iași, 1 februarie 2016

CLASA A XII-A

Problema 1.

Calculați $\int_0^1 (e^{\sqrt{x}} + e^{\sqrt[3]{x}} + e^{\sqrt[4]{x}}) dx$.

Problema 2.

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $M = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det X = \det(A + X) = 0\}$.

- a) Determinați două mulțimi K și L , părți stabile ale monoidului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \cdot)$, astfel încât $K \cup L = M$.
b) Este M stabilă în raport cu înmulțirea matricelor?

Problema 3.

Considerăm o funcție $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă, descrescătoare, astfel încât $f(\pi) = 0$ și fie F o primitivă a sa. Demonstrați că

$$\int_0^{2\pi} F(x) \cos x \, dx \leq 0.$$

Problema 4.

Spunem că un grup finit (G, \cdot) cu n elemente este *bun* dacă îndeplinește condițiile: (i) n nu este divizibil cu 4 și (ii) există două elemente distincte a și b ale lui G , diferite de elementul neutru e al grupului, astfel încât $a^2 = b^2 = e$.

- a) Dați un exemplu de grup bun.
b) Dacă există un grup bun cu n elemente, arătați că $n = 4k + 2$, unde $k \in \mathbb{N}^*$.
c) Demonstrați că un grup bun nu poate fi abelian.

Gazeta Matematică 11/2015 (Supliment)

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.